Colle du 25/03 - Sujet 1
Dimension et séries

Question de cours. Démontrer la caractérisation par les bases adaptées de la somme directe.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $F = \{ P \in E \mid XP(X+1) = (X+2)P \}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est en somme directe avec $\mathbb{R}_1[X]$.
3. Montrer que $\mathscr{B}_F = \left(X^k(X+1)\right)_{k \in [\![1;n]\!]}$ est une famille de vecteurs de F.
4. En déduire F et montrer que F est $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 2. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Colle du 25/03 - Sujet 2
Dimension et séries

Question de cours. Existence d'un supplémentaire en dimension finie.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ et pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1. Montrer que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} u_n$ diverge.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $F = \{ P \in E \mid P(1) = P(2) = 0 \}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer une base de F puis un supplémentaire de F dans E.

Colle du 25/03 - Sujet 3
Dimension et séries

Question de cours. Théorème de comparaison.

Exercice 1. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$. Déterminer la dimension de F et $\mathscr{D}$. Sont-ils supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 2.

1. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)^p$.
2. On suppose $p = 1$. Déterminer un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.